2.7. Eksponencijalna i logaritamska funkcija

22.10. 2020.

Fotografija: Stephen Walker

Eksponencijalna funkcija

Definicija. **Eksponencijalna funkcija** s bazom $a \in \langle 0,1\rangle \cup \langle 1,+\infty\rangle$ je funkcija

$$f(x) := a^x.$$

Eksponencijalna funkcija

Definicija. **Eksponencijalna funkcija** s bazom $a \in \langle 0, 1\rangle \cup \langle 1, +\infty\rangle$ je funkcija

$$f(x) := a^x.$$

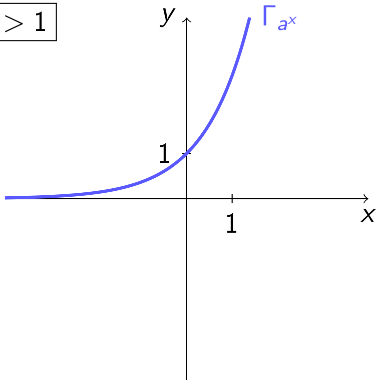
$\rightsquigarrow f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}.$

Definicija. **Eksponencijalna funkcija** s bazom $a \in \langle 0, 1\rangle \cup \langle 1, +\infty\rangle$ je funkcija

$$f(x) := a^x.$$

$\rightsquigarrow f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}.$

$\boxed{a > 1}$

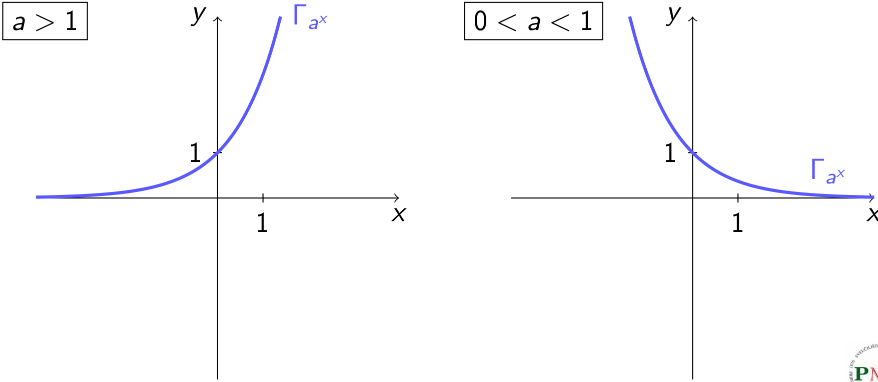


Eksponencijalna funkcija

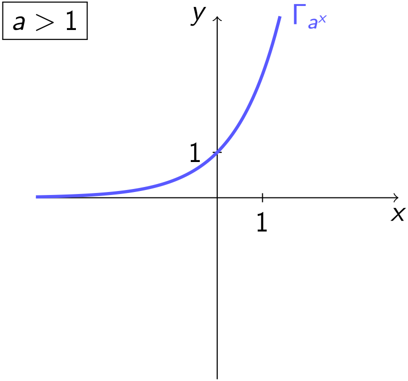
Definicija. **Eksponencijalna funkcija** s bazom $a \in \langle 0, 1\rangle \cup \langle 1, +\infty\rangle$ je funkcija

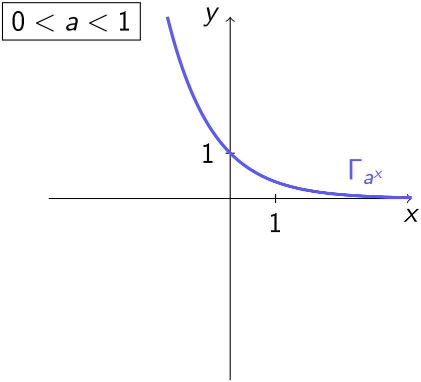
$$f(x) := a^x.$$

$\rightsquigarrow f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}.$

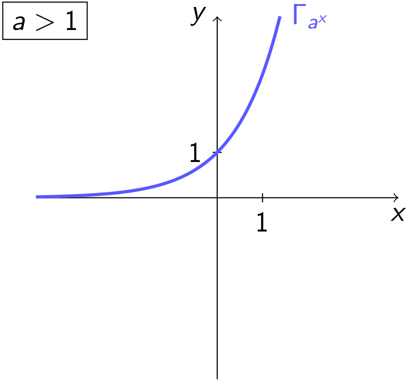


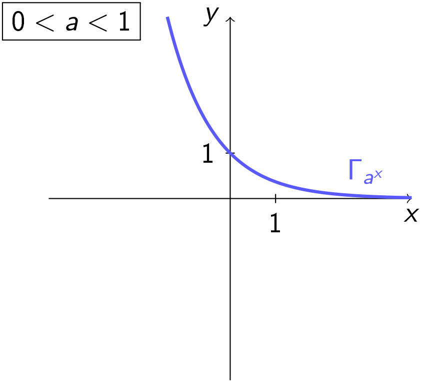
Logaritamska funkcija





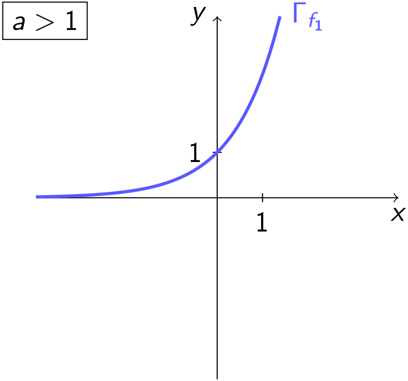
Logaritamska funkcija

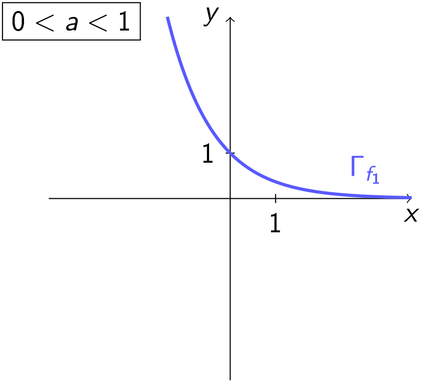




Funkcija $f(x) := a^x$ nije bijekcija.

Logaritamska funkcija

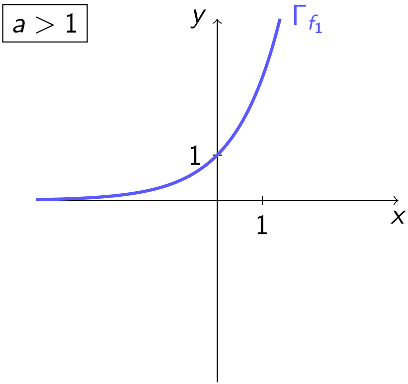


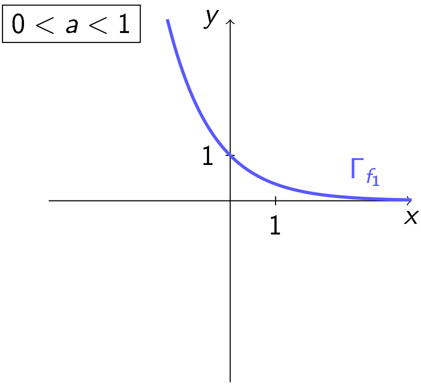


Funkcija $f(x) := a^x$ nije bijekcija. Ali funkcija $f_1 : \mathbb{R} \to \langle 0, +\infty \rangle$,

$$f_1(x) := a^x,$$

jest bijekcija.





Funkcija $f(x) := a^x$ nije bijekcija. Ali funkcija $f_1 : \mathbb{R} \to \langle 0, +\infty \rangle$,

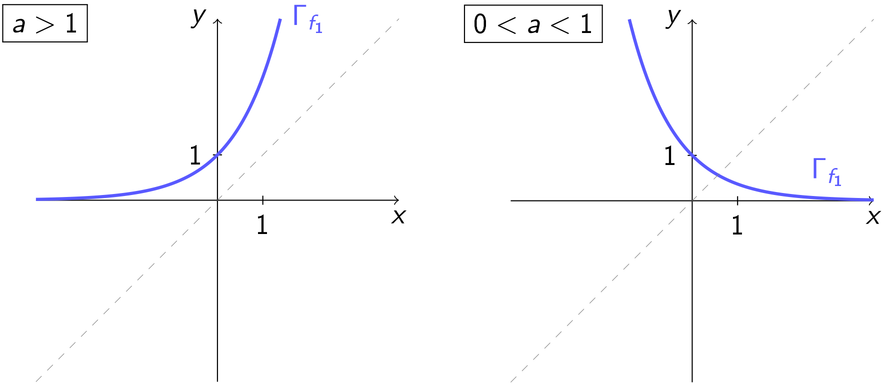
$$f_1(x) := a^x,$$

jest bijekcija. Njenu inverznu funkciju

$$\log_a := f_1^{-1} : \langle 0, +\infty \rangle \to \mathbb{R}$$

zovemo **logaritamskom funkcijom** s bazom a.

Logaritamska funkcija



Funkcija $f(x) := a^x$ nije bijekcija. Ali funkcija $f_1 : \mathbb{R} \to \langle 0, +\infty \rangle$,

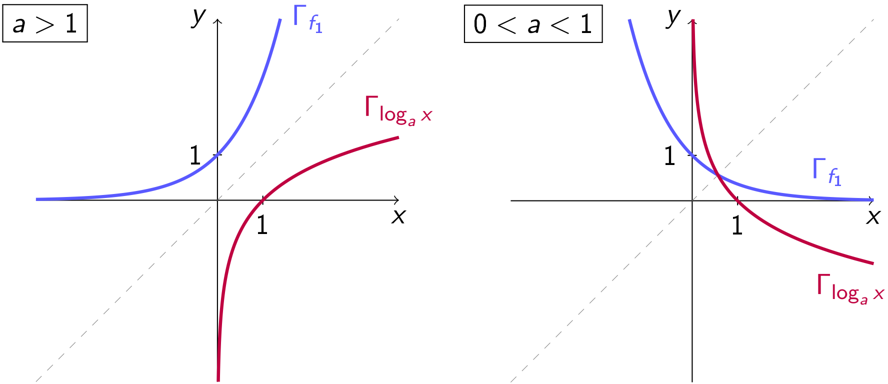
$$f_1(x) := a^x,$$

jest bijekcija. Njenu inverznu funkciju

$$\log_a := f_1^{-1} : \langle 0, +\infty \rangle \to \mathbb{R}$$

zovemo **logaritamskom funkcijom** s bazom a.

Logaritamska funkcija



Funkcija $f(x) := a^x$ nije bijekcija. Ali funkcija $f_1 : \mathbb{R} \to \langle 0, +\infty \rangle$,

$$f_1(x) := a^x,$$

jest bijekcija. Njenu inverznu funkciju

$$\log_a := f_1^{-1} : \langle 0, +\infty \rangle \to \mathbb{R}$$

zovemo **logaritamskom funkcijom** s bazom a.

Dakle, za svaki $y > 0$ vrijedi

$$a^{\log_a y} = y.$$

Dakle, za svaki $y > 0$ vrijedi

$$a^{\log_a y} = y.$$

Drugim riječima, $\log_a y$ je eksponent $x \in \mathbb{R}$ za koji je

$$a^x = y.$$

Dakle, za svaki $y > 0$ vrijedi

$$a^{\log_a y} = y.$$

Drugim riječima, $\log_a y$ je eksponent $x \in \mathbb{R}$ za koji je

$$a^x = y.$$

Za najčešće korištene logaritamske baze, $a = 10$ i $a = e \approx 2.7181828$, koristimo posebne oznake:

$$\log := \log_{10},$$

$$\ln := \log_e.$$

Svojstva eksponencijalne i logaritamske funkcije

Za sve $a, b \in \langle 0,1\rangle \cup \langle 1,+\infty\rangle$ i $x, y \in \mathbb{R}$ vrijedi:

- $a^{x+y} = a^x \cdot a^y$
- $(a^x)^y = a^{xy}$
- $(ab)^x = a^x \cdot b^x$
- $\log_a (a^x) = x.$

Za sve $a, b \in \langle 0,1\rangle \cup \langle 1,+\infty\rangle$, $x, y \in \langle 0,+\infty\rangle$, $M \in \mathbb{R}$ i $N \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ vrijedi:

- $a^{\log_a x} = x$
- $\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$
- $\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$
- $\log_a x^M = M \log_a x$
- $\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$
- $\log_{a^N} x = \frac{1}{N} \log_a x.$

Zadatak 13(a)

Odredite sva rješenja (u $\mathbb{R}$) jednadžbe

$$2^x \cdot 0.5^{\frac{3}{x}} = 4.$$

Zadatak 13(a)

Odredite sva rješenja (u $\mathbb{R}$) jednadžbe

$$2^x \cdot 0.5^{\frac{3}{x}} = 4.$$

Rješenje. $$2^x \cdot 0.5^{\frac{3}{x}} = 4 \quad \Leftrightarrow \quad 2^x \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{3}{x}} = 4$$

Zadatak 13(a)

Odredite sva rješenja (u $\mathbb{R}$) jednadžbe

$$2^x \cdot 0.5^{\frac{3}{x}} = 4.$$

Rješenje.

$$\begin{aligned} 2^x \cdot 0.5^{\frac{3}{x}} = 4 \quad &\Leftrightarrow \quad 2^x \cdot \left(\tfrac{1}{2}\right)^{\frac{3}{x}} = 4 \\ &\Leftrightarrow \quad 2^x \cdot \left(2^{-1}\right)^{\frac{3}{x}} = 4 \end{aligned}$$

Zadatak 13(a)

Odredite sva rješenja (u $\mathbb{R}$) jednadžbe

$$2^x \cdot 0.5^{\frac{3}{x}} = 4.$$

Rješenje.

$$\begin{aligned} 2^x \cdot 0.5^{\frac{3}{x}} = 4 \quad &\Leftrightarrow \quad 2^x \cdot \left(\tfrac{1}{2}\right)^{\frac{3}{x}} = 4 \\ &\Leftrightarrow \quad 2^x \cdot \left(2^{-1}\right)^{\frac{3}{x}} = 4 \\ &\Leftrightarrow \quad 2^x \cdot 2^{-\frac{3}{x}} = 4 \end{aligned}$$

Zadatak 13(a)

Odredite sva rješenja (u $\mathbb{R}$) jednadžbe

$$2^x \cdot 0.5^{\frac{3}{x}} = 4.$$

Rješenje.

$$\begin{aligned} 2^x \cdot 0.5^{\frac{3}{x}} = 4 \quad &\Leftrightarrow \quad 2^x \cdot \left(\tfrac{1}{2}\right)^{\frac{3}{x}} = 4 \\ &\Leftrightarrow \quad 2^x \cdot \left(2^{-1}\right)^{\frac{3}{x}} = 4 \\ &\Leftrightarrow \quad 2^x \cdot 2^{-\frac{3}{x}} = 4 \\ &\Leftrightarrow \quad 2^{x-\frac{3}{x}} = 4 \end{aligned}$$

Zadatak 13(a)

Odredite sva rješenja (u $\mathbb{R}$) jednadžbe

$$2^x \cdot 0.5^{\frac{3}{x}} = 4.$$

Rješenje.

$$\begin{aligned}
2^x \cdot 0.5^{\frac{3}{x}} = 4 \quad &\Leftrightarrow \quad 2^x \cdot \left(\tfrac{1}{2}\right)^{\frac{3}{x}} = 4 \\
&\Leftrightarrow \quad 2^x \cdot \left(2^{-1}\right)^{\frac{3}{x}} = 4 \\
&\Leftrightarrow \quad 2^x \cdot 2^{-\frac{3}{x}} = 4 \\
&\Leftrightarrow \quad 2^{x-\frac{3}{x}} = 4 \\
&\overset{\log_2}{\Leftrightarrow} \quad x - \frac{3}{x} = 2
\end{aligned}$$

Odredite sva rješenja (u $\mathbb{R}$) jednadžbe

$$2^x \cdot 0.5^{\frac{3}{x}} = 4.$$

Rješenje.

$$\begin{aligned}
2^x \cdot 0.5^{\frac{3}{x}} = 4 \quad &\Leftrightarrow \quad 2^x \cdot \left(\tfrac{1}{2}\right)^{\frac{3}{x}} = 4\\
&\Leftrightarrow \quad 2^x \cdot \left(2^{-1}\right)^{\frac{3}{x}} = 4\\
&\Leftrightarrow \quad 2^x \cdot 2^{-\frac{3}{x}} = 4\\
&\Leftrightarrow \quad 2^{x-\frac{3}{x}} = 4\\
&\overset{\log_2}{\Leftrightarrow} \quad x - \frac{3}{x} = 2\\
&\overset{\cdot x (\neq 0)}{\Leftrightarrow} \quad x^2 - 2x - 3 = 0
\end{aligned}$$

Zadatak 13(a)

Odredite sva rješenja (u $\mathbb{R}$) jednadžbe

$$2^x \cdot 0.5^{\frac{3}{x}} = 4.$$

Rješenje.

$$\begin{aligned}
2^x \cdot 0.5^{\frac{3}{x}} = 4 \quad &\Leftrightarrow \quad 2^x \cdot \left(\tfrac{1}{2}\right)^{\frac{3}{x}} = 4 \\
&\Leftrightarrow \quad 2^x \cdot \left(2^{-1}\right)^{\frac{3}{x}} = 4 \\
&\Leftrightarrow \quad 2^x \cdot 2^{-\frac{3}{x}} = 4 \\
&\Leftrightarrow \quad 2^{x-\frac{3}{x}} = 4 \\
&\overset{\log_2}{\Leftrightarrow} \quad x - \frac{3}{x} = 2 \\
&\overset{\cdot x (\neq 0)}{\Leftrightarrow} \quad x^2 - 2x - 3 = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad (x-3)(x+1) = 0
\end{aligned}$$

Zadatak 13(a)

Odredite sva rješenja (u $\mathbb{R}$) jednadžbe

$$2^x \cdot 0.5^{\frac{3}{x}} = 4.$$

Rješenje.

$$\begin{aligned}
2^x \cdot 0.5^{\frac{3}{x}} = 4 \quad &\Leftrightarrow \quad 2^x \cdot \left(\tfrac{1}{2}\right)^{\frac{3}{x}} = 4 \\
&\Leftrightarrow \quad 2^x \cdot \left(2^{-1}\right)^{\frac{3}{x}} = 4 \\
&\Leftrightarrow \quad 2^x \cdot 2^{-\frac{3}{x}} = 4 \\
&\Leftrightarrow \quad 2^{x-\frac{3}{x}} = 4 \\
&\overset{\log_2}{\Leftrightarrow} \quad x - \frac{3}{x} = 2 \\
&\overset{\cdot x (\neq 0)}{\Leftrightarrow} \quad x^2 - 2x - 3 = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad (x-3)(x+1) = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad x = -1 \quad \text{ili} \quad x = 3.
\end{aligned}$$

Zadatak 13(b)

Odredite sva rješenja (u $\mathbb{R}$) jednadžbe

$$2^x \cdot 8^{\frac{1}{x}} = 16.$$

Zadatak 13(b)

Odredite sva rješenja (u $\mathbb{R}$) jednadžbe

$$2^x \cdot 8^{\frac{1}{x}} = 16.$$

Rješenje. Imamo

$$2^x \cdot 8^{\frac{1}{x}} = 16 \qquad \Leftrightarrow \qquad 2^x \cdot \left(2^3\right)^{\frac{1}{x}} = 2^4$$

Zadatak 13(b)

Odredite sva rješenja (u $\mathbb{R}$) jednadžbe

$$2^x \cdot 8^{\frac{1}{x}} = 16.$$

Rješenje. Imamo

$$\begin{aligned} 2^x \cdot 8^{\frac{1}{x}} = 16 \quad &\Leftrightarrow \quad 2^x \cdot \left(2^3\right)^{\frac{1}{x}} = 2^4 \\ &\Leftrightarrow \quad 2^{x+\frac{3}{x}} = 2^4 \end{aligned}$$

Zadatak 13(b)

Odredite sva rješenja (u $\mathbb{R}$) jednadžbe

$$2^x \cdot 8^{\frac{1}{x}} = 16.$$

Rješenje. Imamo

$$\begin{aligned} 2^x \cdot 8^{\frac{1}{x}} = 16 \quad &\Leftrightarrow \quad 2^x \cdot \left(2^3\right)^{\frac{1}{x}} = 2^4 \\ &\Leftrightarrow \quad 2^{x+\frac{3}{x}} = 2^4 \\ &\overset{\log_2}{\Leftrightarrow} \quad x + \frac{3}{x} = 4 \end{aligned}$$

Zadatak 13(b)

Odredite sva rješenja (u $\mathbb{R}$) jednadžbe

$$2^x \cdot 8^{\frac{1}{x}} = 16.$$

Rješenje. Imamo

$$\begin{aligned}
2^x \cdot 8^{\frac{1}{x}} = 16 \quad & \Leftrightarrow \quad 2^x \cdot \left(2^3\right)^{\frac{1}{x}} = 2^4 \\
& \Leftrightarrow \quad 2^{x+\frac{3}{x}} = 2^4 \\
& \overset{\log_2}{\Leftrightarrow} \quad x + \frac{3}{x} = 4 \\
& \overset{\cdot x (\neq 0)}{\Leftrightarrow} \quad x^2 - 4x + 3 = 0
\end{aligned}$$

Zadatak 13(b)

Odredite sva rješenja (u $\mathbb{R}$) jednadžbe

$$2^x \cdot 8^{\frac{1}{x}} = 16.$$

Rješenje. Imamo

$$\begin{aligned}
2^x \cdot 8^{\frac{1}{x}} = 16 \quad &\Leftrightarrow \quad 2^x \cdot \left(2^3\right)^{\frac{1}{x}} = 2^4 \\
&\Leftrightarrow \quad 2^{x+\frac{3}{x}} = 2^4 \\
&\overset{\log_2}{\Leftrightarrow} \quad x + \frac{3}{x} = 4 \\
&\overset{\cdot x(\neq 0)}{\Leftrightarrow} \quad x^2 - 4x + 3 = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad (x-1)(x-3) = 0
\end{aligned}$$

Zadatak 13(b)

Odredite sva rješenja (u $\mathbb{R}$) jednadžbe

$$2^x \cdot 8^{\frac{1}{x}} = 16.$$

Rješenje. Imamo

$$\begin{aligned}
2^x \cdot 8^{\frac{1}{x}} = 16 \quad &\Leftrightarrow \quad 2^x \cdot \left(2^3\right)^{\frac{1}{x}} = 2^4 \\
&\Leftrightarrow \quad 2^{x+\frac{3}{x}} = 2^4 \\
&\overset{\log_2}{\Leftrightarrow} \quad x + \frac{3}{x} = 4 \\
&\overset{\cdot x(\neq 0)}{\Leftrightarrow} \quad x^2 - 4x + 3 = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad (x-1)(x-3) = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad x = 1 \quad \text{ili} \quad x = 3.
\end{aligned}$$

Zadatak 13(b)

Odredite sva rješenja (u $\mathbb{R}$) jednadžbe

$$2^x \cdot 8^{\frac{1}{x}} = 16.$$

Rješenje. Imamo

$$\begin{aligned}
2^x \cdot 8^{\frac{1}{x}} = 16 \quad &\Leftrightarrow \quad 2^x \cdot \left(2^3\right)^{\frac{1}{x}} = 2^4 \\
&\Leftrightarrow \quad 2^{x+\frac{3}{x}} = 2^4 \\
&\overset{\log_2}{\Leftrightarrow} \quad x + \frac{3}{x} = 4 \\
&\overset{\cdot x(\neq 0)}{\Leftrightarrow} \quad x^2 - 4x + 3 = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad (x-1)(x-3) = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad x = 1 \quad \text{ili} \quad x = 3.
\end{aligned}$$

Dakle, jedina su rješenja zadane jednadžbe 1 i 3.

Zadatak 13(c)

Odredite sva rješenja (u $\mathbb{R}$) jednadžbe

$$4^x - 2^{x+3} + 15 = 0.$$

Zadatak 13(c)

Odredite sva rješenja (u $\mathbb{R}$) jednadžbe

$$4^x - 2^{x+3} + 15 = 0.$$

Rješenje. Imamo

$$4^x - 2^{x+3} + 15 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (2^x)^2 - 2^3 \cdot 2^x + 15 = 0$$

Zadatak 13(c)

Odredite sva rješenja (u $\mathbb{R}$) jednadžbe

$$4^x - 2^{x+3} + 15 = 0.$$

Rješenje. Imamo

$$\begin{aligned} 4^x - 2^{x+3} + 15 = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad (2^x)^2 - 2^3 \cdot 2^x + 15 = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad (2^x)^2 - 8 \cdot 2^x + 15 = 0 \end{aligned}$$

Zadatak 13(c)

Odredite sva rješenja (u $\mathbb{R}$) jednadžbe

$$4^x - 2^{x+3} + 15 = 0.$$

Rješenje. Imamo

$$\begin{aligned}
4^x - 2^{x+3} + 15 = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad (2^x)^2 - 2^3 \cdot 2^x + 15 = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad (2^x)^2 - 8 \cdot 2^x + 15 = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad (\text{supstitucija } t = 2^x) \quad \Leftrightarrow \quad t^2 - 8t + 15 = 0
\end{aligned}$$

Odredite sva rješenja (u $\mathbb{R}$) jednadžbe

$$4^x - 2^{x+3} + 15 = 0.$$

Rješenje. Imamo

$$\begin{aligned}
4^x - 2^{x+3} + 15 = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad (2^x)^2 - 2^3 \cdot 2^x + 15 = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad (2^x)^2 - 8 \cdot 2^x + 15 = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad (\text{supstitucija } t = 2^x) \quad \Leftrightarrow \quad t^2 - 8t + 15 = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad (t-3)(t-5) = 0
\end{aligned}$$

Zadatak 13(c)

Odredite sva rješenja (u $\mathbb{R}$) jednadžbe

$$4^x - 2^{x+3} + 15 = 0.$$

Rješenje. Imamo

$$\begin{aligned}
4^x - 2^{x+3} + 15 = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad (2^x)^2 - 2^3 \cdot 2^x + 15 = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad (2^x)^2 - 8 \cdot 2^x + 15 = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad (\text{supstitucija } t = 2^x) \quad \Leftrightarrow \quad t^2 - 8t + 15 = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad (t-3)(t-5) = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad t = 3 \qquad \text{ili} \qquad t = 5
\end{aligned}$$

Zadatak 13(c)

Odredite sva rješenja (u $\mathbb{R}$) jednadžbe

$$4^x - 2^{x+3} + 15 = 0.$$

Rješenje. Imamo

$$\begin{aligned}
4^x - 2^{x+3} + 15 = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad (2^x)^2 - 2^3 \cdot 2^x + 15 = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad (2^x)^2 - 8 \cdot 2^x + 15 = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad (\text{supstitucija } t = 2^x) \quad \Leftrightarrow \quad t^2 - 8t + 15 = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad (t-3)(t-5) = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad t = 3 \quad \text{ili} \quad t = 5 \\
&\Leftrightarrow \quad 2^x = 3 \quad \text{ili} \quad 2^x = 5
\end{aligned}$$

Zadatak 13(c)

Odredite sva rješenja (u $\mathbb{R}$) jednadžbe

$$4^x - 2^{x+3} + 15 = 0.$$

Rješenje. Imamo

$$\begin{aligned}
4^x - 2^{x+3} + 15 = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad (2^x)^2 - 2^3 \cdot 2^x + 15 = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad (2^x)^2 - 8 \cdot 2^x + 15 = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad (\text{supstitucija } t = 2^x) \quad \Leftrightarrow \quad t^2 - 8t + 15 = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad (t-3)(t-5) = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad t = 3 \quad \text{ili} \quad t = 5 \\
&\Leftrightarrow \quad 2^x = 3 \quad \text{ili} \quad 2^x = 5 \\
&\overset{\log_2}{\Leftrightarrow} \quad x = \log_2 3 \quad \text{ili} \quad x = \log_2 5.
\end{aligned}$$

Zadatak 13(c)

Odredite sva rješenja (u $\mathbb{R}$) jednadžbe

$$4^x - 2^{x+3} + 15 = 0.$$

Rješenje. Imamo

$$\begin{aligned}
4^x - 2^{x+3} + 15 = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad (2^x)^2 - 2^3 \cdot 2^x + 15 = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad (2^x)^2 - 8 \cdot 2^x + 15 = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad (\text{supstitucija } t = 2^x) \quad \Leftrightarrow \quad t^2 - 8t + 15 = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad (t-3)(t-5) = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad t = 3 \quad \text{ili} \quad t = 5 \\
&\Leftrightarrow \quad 2^x = 3 \quad \text{ili} \quad 2^x = 5 \\
&\overset{\log_2}{\Leftrightarrow} \quad x = \log_2 3 \quad \text{ili} \quad x = \log_2 5.
\end{aligned}$$

Dakle, jedina su rješenja zadane jednadžbe $\log_2 3$ i $\log_2 5$.

Zadatak 13(d)

Odredite sva rješenja (u $\mathbb{R}$) jednadžbe

$$4^x + 6^x = 2 \cdot 9^x.$$

Zadatak 13(d)

Odredite sva rješenja (u $\mathbb{R}$) jednadžbe

$$4^x + 6^x = 2 \cdot 9^x.$$

Rješenje. Imamo

$$4^x + 6^x = 2 \cdot 9^x \quad \Leftrightarrow \quad (2^x)^2 + 2^x \cdot 3^x = 2 \cdot (3^x)^2$$

Zadatak 13(d)

Odredite sva rješenja (u $\mathbb{R}$) jednadžbe

$$4^x + 6^x = 2 \cdot 9^x.$$

Rješenje. Imamo

$$4^x + 6^x = 2 \cdot 9^x \quad \Leftrightarrow \quad (2^x)^2 + 2^x \cdot 3^x = 2 \cdot (3^x)^2$$

$$\overset{\cdot \frac{1}{(3^x)^2}}{\Leftrightarrow} \quad \left(\frac{2^x}{3^x}\right)^2 + \frac{2^x}{3^x} - 2 = 0$$

Zadatak 13(d)

Odredite sva rješenja (u $\mathbb{R}$) jednadžbe

$$4^x + 6^x = 2 \cdot 9^x.$$

Rješenje. Imamo

$$\begin{aligned}
4^x + 6^x = 2 \cdot 9^x \quad &\Leftrightarrow \quad (2^x)^2 + 2^x \cdot 3^x = 2 \cdot (3^x)^2 \\
&\overset{\cdot \frac{1}{(3^x)^2}}{\Leftrightarrow} \quad \left(\frac{2^x}{3^x}\right)^2 + \frac{2^x}{3^x} - 2 = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad \left(\left(\frac{2}{3}\right)^x\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^x - 2 = 0
\end{aligned}$$

Odredite sva rješenja (u $\mathbb{R}$) jednadžbe

$$4^x + 6^x = 2 \cdot 9^x.$$

Rješenje. Imamo

$$\begin{aligned}
4^x + 6^x = 2 \cdot 9^x \quad & \Leftrightarrow \quad (2^x)^2 + 2^x \cdot 3^x = 2 \cdot (3^x)^2 \\
& \overset{\cdot \frac{1}{(3^x)^2}}{\Leftrightarrow} \quad \left(\frac{2^x}{3^x}\right)^2 + \frac{2^x}{3^x} - 2 = 0 \\
& \Leftrightarrow \quad \left(\left(\frac{2}{3}\right)^x\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^x - 2 = 0 \\
& \Leftrightarrow \quad \left(\text{supstitucija } t = \left(\frac{2}{3}\right)^x\right) \quad \Leftrightarrow \quad t^2 + t - 2 = 0
\end{aligned}$$

Zadatak 13(d)

Odredite sva rješenja (u $\mathbb{R}$) jednadžbe

$$4^x + 6^x = 2 \cdot 9^x.$$

Rješenje. Imamo

$$\begin{aligned}
4^x + 6^x = 2 \cdot 9^x \quad &\Leftrightarrow \quad (2^x)^2 + 2^x \cdot 3^x = 2 \cdot (3^x)^2 \\
&\overset{\cdot \frac{1}{(3^x)^2}}{\Leftrightarrow} \quad \left(\frac{2^x}{3^x}\right)^2 + \frac{2^x}{3^x} - 2 = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad \left(\left(\frac{2}{3}\right)^x\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^x - 2 = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad \left(\text{supstitucija } t = \left(\frac{2}{3}\right)^x\right) \quad \Leftrightarrow \quad t^2 + t - 2 = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad (t+2)(t-1) = 0
\end{aligned}$$

Zadatak 13(d)

Odredite sva rješenja (u $\mathbb{R}$) jednadžbe
$$4^x + 6^x = 2 \cdot 9^x.$$

Rješenje. Imamo

$$\begin{aligned}
4^x + 6^x = 2 \cdot 9^x \quad &\Leftrightarrow \quad (2^x)^2 + 2^x \cdot 3^x = 2 \cdot (3^x)^2 \\
&\overset{\cdot \frac{1}{(3^x)^2}}{\Leftrightarrow} \quad \left(\frac{2^x}{3^x}\right)^2 + \frac{2^x}{3^x} - 2 = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad \left(\left(\frac{2}{3}\right)^x\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^x - 2 = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad \left(\text{supstitucija } t = \left(\frac{2}{3}\right)^x\right) \quad \Leftrightarrow \quad t^2 + t - 2 = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad (t+2)(t-1) = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad t = -2 \qquad \text{ili} \qquad t = 1
\end{aligned}$$

Zadatak 13(d)

Odredite sva rješenja (u $\mathbb{R}$) jednadžbe

$$4^x + 6^x = 2 \cdot 9^x.$$

Rješenje. Imamo

$$\begin{aligned}
4^x + 6^x = 2 \cdot 9^x \quad &\Leftrightarrow \quad (2^x)^2 + 2^x \cdot 3^x = 2 \cdot (3^x)^2 \\
&\overset{\cdot \frac{1}{(3^x)^2}}{\Leftrightarrow} \quad \left(\frac{2^x}{3^x}\right)^2 + \frac{2^x}{3^x} - 2 = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad \left(\left(\tfrac{2}{3}\right)^x\right)^2 + \left(\tfrac{2}{3}\right)^x - 2 = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad \left(\text{supstitucija } t = \left(\tfrac{2}{3}\right)^x\right) \quad \Leftrightarrow \quad t^2 + t - 2 = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad (t+2)(t-1) = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad t = -2 \quad \text{ili} \quad t = 1 \\
&\Leftrightarrow \quad \left(\tfrac{2}{3}\right)^x = -2 \quad \text{ili} \quad \left(\tfrac{2}{3}\right)^x = 1
\end{aligned}$$

Odredite sva rješenja (u $\mathbb{R}$) jednadžbe

$$4^x + 6^x = 2 \cdot 9^x.$$

Rješenje. Imamo

$$\begin{aligned}
4^x + 6^x = 2 \cdot 9^x \quad &\Leftrightarrow \quad (2^x)^2 + 2^x \cdot 3^x = 2 \cdot (3^x)^2 \\
&\overset{\cdot \frac{1}{(3^x)^2}}{\Leftrightarrow} \quad \left(\frac{2^x}{3^x}\right)^2 + \frac{2^x}{3^x} - 2 = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad \left(\left(\frac{2}{3}\right)^x\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^x - 2 = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad \left(\text{supstitucija } t = \left(\frac{2}{3}\right)^x\right) \quad \Leftrightarrow \quad t^2 + t - 2 = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad (t+2)(t-1) = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad t = -2 \qquad \text{ili} \qquad t = 1 \\
&\Leftrightarrow \quad \left(\frac{2}{3}\right)^x = -2 \text{ ✗} \quad \text{ili} \qquad \left(\frac{2}{3}\right)^x = 1
\end{aligned}$$

Zadatak 13(d)

Odredite sva rješenja (u $\mathbb{R}$) jednadžbe

$$4^x + 6^x = 2 \cdot 9^x.$$

Rješenje. Imamo

$$\begin{aligned}
4^x + 6^x = 2 \cdot 9^x \quad &\Leftrightarrow \quad (2^x)^2 + 2^x \cdot 3^x = 2 \cdot (3^x)^2 \\
&\overset{\cdot \frac{1}{(3^x)^2}}{\Leftrightarrow} \quad \left(\frac{2^x}{3^x}\right)^2 + \frac{2^x}{3^x} - 2 = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad \left(\left(\tfrac{2}{3}\right)^x\right)^2 + \left(\tfrac{2}{3}\right)^x - 2 = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad \left(\text{supstitucija } t = \left(\tfrac{2}{3}\right)^x\right) \quad \Leftrightarrow \quad t^2 + t - 2 = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad (t+2)(t-1) = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad t = -2 \quad \text{ili} \quad t = 1 \\
&\Leftrightarrow \quad \left(\tfrac{2}{3}\right)^x = -2 \ \text{✗} \quad \text{ili} \quad \left(\tfrac{2}{3}\right)^x = 1 \\
&\overset{\log_{\frac{2}{3}}}{\Leftrightarrow} \quad x = \log_{\frac{2}{3}} 1 = 0.
\end{aligned}$$

Zadatak 13(d)

Odredite sva rješenja (u $\mathbb{R}$) jednadžbe

$$4^x + 6^x = 2 \cdot 9^x.$$

Rješenje. Imamo

$$\begin{aligned}
4^x + 6^x = 2 \cdot 9^x \quad &\Leftrightarrow \quad (2^x)^2 + 2^x \cdot 3^x = 2 \cdot (3^x)^2 \\
&\overset{\cdot \frac{1}{(3^x)^2}}{\Leftrightarrow} \quad \left(\frac{2^x}{3^x}\right)^2 + \frac{2^x}{3^x} - 2 = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad \left(\left(\frac{2}{3}\right)^x\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^x - 2 = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad \left(\text{supstitucija } t = \left(\frac{2}{3}\right)^x\right) \quad \Leftrightarrow \quad t^2 + t - 2 = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad (t+2)(t-1) = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad t = -2 \quad \text{ili} \quad t = 1 \\
&\Leftrightarrow \quad \left(\frac{2}{3}\right)^x = -2 \text{ ✗} \quad \text{ili} \quad \left(\frac{2}{3}\right)^x = 1 \\
&\overset{\log_{\frac{2}{3}}}{\Leftrightarrow} \quad x = \log_{\frac{2}{3}} 1 = 0.
\end{aligned}$$

Dakle, jedino je rješenje zadane jednadžbe 0.

Zadatak 13(e)

Odredite sva rješenja (u $\mathbb{R}$) jednadžbe

$$9^{x-2} \cdot 2^{2x-1} = 8.$$

Odredite sva rješenja (u $\mathbb{R}$) jednadžbe

$$9^{x-2} \cdot 2^{2x-1} = 8.$$

Rješenje. Imamo

$$9^{x-2} \cdot 2^{2x-1} = 8 \quad \Leftrightarrow \quad 9^{x} \cdot 9^{-2} \cdot \left(2^{2}\right)^{x} \cdot 2^{-1} = 8$$

Zadatak 13(e)

Odredite sva rješenja (u $\mathbb{R}$) jednadžbe

$$9^{x-2} \cdot 2^{2x-1} = 8.$$

Rješenje. Imamo

$$\begin{aligned} 9^{x-2} \cdot 2^{2x-1} = 8 \quad &\Leftrightarrow \quad 9^x \cdot 9^{-2} \cdot \left(2^2\right)^x \cdot 2^{-1} = 8 \\ &\overset{\cdot 2 \cdot 9^2}{\Leftrightarrow} \quad 36^x = 16 \cdot 9^2 \end{aligned}$$

Odredite sva rješenja (u $\mathbb{R}$) jednadžbe

$$9^{x-2} \cdot 2^{2x-1} = 8.$$

Rješenje. Imamo

$$\begin{aligned} 9^{x-2} \cdot 2^{2x-1} = 8 \quad &\Leftrightarrow \quad 9^x \cdot 9^{-2} \cdot \left(2^2\right)^x \cdot 2^{-1} = 8 \\ &\overset{\cdot 2 \cdot 9^2}{\Leftrightarrow} \quad 36^x = 16 \cdot 9^2 \\ &\Leftrightarrow \quad 36^x = 4^2 \cdot 9^2 \end{aligned}$$

Zadatak 13(e)

Odredite sva rješenja (u $\mathbb{R}$) jednadžbe

$$9^{x-2} \cdot 2^{2x-1} = 8.$$

Rješenje. Imamo

$$\begin{aligned}
9^{x-2} \cdot 2^{2x-1} = 8 \quad &\Leftrightarrow \quad 9^x \cdot 9^{-2} \cdot \left(2^2\right)^x \cdot 2^{-1} = 8 \\
&\overset{\cdot 2 \cdot 9^2}{\Leftrightarrow} \quad 36^x = 16 \cdot 9^2 \\
&\Leftrightarrow \quad 36^x = 4^2 \cdot 9^2 \\
&\Leftrightarrow \quad 36^x = 36^2
\end{aligned}$$

Zadatak 13(e)

Odredite sva rješenja (u $\mathbb{R}$) jednadžbe

$$9^{x-2} \cdot 2^{2x-1} = 8.$$

Rješenje. Imamo

$$\begin{aligned}
9^{x-2} \cdot 2^{2x-1} = 8 \quad &\Leftrightarrow \quad 9^x \cdot 9^{-2} \cdot \left(2^2\right)^x \cdot 2^{-1} = 8 \\
&\overset{\cdot 2 \cdot 9^2}{\Leftrightarrow} \quad 36^x = 16 \cdot 9^2 \\
&\Leftrightarrow \quad 36^x = 4^2 \cdot 9^2 \\
&\Leftrightarrow \quad 36^x = 36^2 \\
&\overset{\log_{36}}{\Leftrightarrow} \quad x = 2.
\end{aligned}$$

Zadatak 13(e)

Odredite sva rješenja (u $\mathbb{R}$) jednadžbe

$$9^{x-2} \cdot 2^{2x-1} = 8.$$

Rješenje. Imamo

$$\begin{aligned}
9^{x-2} \cdot 2^{2x-1} = 8 \quad &\Leftrightarrow \quad 9^x \cdot 9^{-2} \cdot \left(2^2\right)^x \cdot 2^{-1} = 8 \\
&\overset{\cdot 2 \cdot 9^2}{\Leftrightarrow} \quad 36^x = 16 \cdot 9^2 \\
&\Leftrightarrow \quad 36^x = 4^2 \cdot 9^2 \\
&\Leftrightarrow \quad 36^x = 36^2 \\
&\overset{\log_{36}}{\Leftrightarrow} \quad x = 2.
\end{aligned}$$

Dakle, jedino je rješenje zadane jednadžbe 2.

Zadatak 13(f)

Odredite sva rješenja (u $\mathbb{R}$) jednadžbe

$$3^{x+1} - 4 \cdot 3^{x-1} = 45.$$

Zadatak 13(f)

Odredite sva rješenja (u $\mathbb{R}$) jednadžbe

$$3^{x+1} - 4 \cdot 3^{x-1} = 45.$$

Rješenje. Imamo

$$3^{x+1} - 4 \cdot 3^{x-1} = 45 \quad \Leftrightarrow \quad 3 \cdot 3^{x} - 4 \cdot 3^{-1} \cdot 3^{x} = 45$$

Zadatak 13(f)

Odredite sva rješenja (u $\mathbb{R}$) jednadžbe

$$3^{x+1} - 4 \cdot 3^{x-1} = 45.$$

Rješenje. Imamo

$$\begin{aligned} 3^{x+1} - 4 \cdot 3^{x-1} = 45 \quad &\Leftrightarrow \quad 3 \cdot 3^x - 4 \cdot 3^{-1} \cdot 3^x = 45 \\ &\Leftrightarrow \quad \left(3 - \frac{4}{3}\right) \cdot 3^x = 45 \end{aligned}$$

Zadatak 13(f)

Odredite sva rješenja (u $\mathbb{R}$) jednadžbe

$$3^{x+1} - 4 \cdot 3^{x-1} = 45.$$

Rješenje. Imamo

$$\begin{aligned}
3^{x+1} - 4 \cdot 3^{x-1} = 45 \quad &\Leftrightarrow \quad 3 \cdot 3^x - 4 \cdot 3^{-1} \cdot 3^x = 45 \\
&\Leftrightarrow \quad \left(3 - \frac{4}{3}\right) \cdot 3^x = 45 \\
&\Leftrightarrow \quad \frac{5}{3} \cdot 3^x = 45
\end{aligned}$$

Odredite sva rješenja (u $\mathbb{R}$) jednadžbe

$$3^{x+1} - 4 \cdot 3^{x-1} = 45.$$

Rješenje. Imamo

$$\begin{aligned} 3^{x+1} - 4 \cdot 3^{x-1} = 45 \quad &\Leftrightarrow \quad 3 \cdot 3^x - 4 \cdot 3^{-1} \cdot 3^x = 45 \\ &\Leftrightarrow \quad \left(3 - \frac{4}{3}\right) \cdot 3^x = 45 \\ &\Leftrightarrow \quad \frac{5}{3} \cdot 3^x = 45 \\ &\overset{\cdot \frac{3}{5}}{\Leftrightarrow} \quad 3^x = 27 \end{aligned}$$

Zadatak 13(f)

Odredite sva rješenja (u $\mathbb{R}$) jednadžbe

$$3^{x+1} - 4 \cdot 3^{x-1} = 45.$$

Rješenje. Imamo

$$\begin{aligned}
3^{x+1} - 4 \cdot 3^{x-1} = 45 \quad &\Leftrightarrow \quad 3 \cdot 3^x - 4 \cdot 3^{-1} \cdot 3^x = 45 \\
&\Leftrightarrow \quad \left(3 - \frac{4}{3}\right) \cdot 3^x = 45 \\
&\Leftrightarrow \quad \frac{5}{3} \cdot 3^x = 45 \\
&\overset{\cdot \frac{3}{5}}{\Leftrightarrow} \quad 3^x = 27 \\
&\overset{\log_3}{\Leftrightarrow} \quad x = \log_3 27 = 3.
\end{aligned}$$

Zadatak 13(f)

Odredite sva rješenja (u $\mathbb{R}$) jednadžbe

$$3^{x+1} - 4 \cdot 3^{x-1} = 45.$$

Rješenje. Imamo

$$\begin{aligned}
3^{x+1} - 4 \cdot 3^{x-1} = 45 \quad &\Leftrightarrow \quad 3 \cdot 3^x - 4 \cdot 3^{-1} \cdot 3^x = 45 \\
&\Leftrightarrow \quad \left(3 - \frac{4}{3}\right) \cdot 3^x = 45 \\
&\Leftrightarrow \quad \frac{5}{3} \cdot 3^x = 45 \\
&\overset{\cdot \frac{3}{5}}{\Leftrightarrow} \quad 3^x = 27 \\
&\overset{\log_3}{\Leftrightarrow} \quad x = \log_3 27 = 3.
\end{aligned}$$

Dakle, jedino je rješenje zadane jednadžbe 3.

Zadatak 14(a)

Odredite sva rješenja (u $\mathbb{R}$) jednadžbe

$$\ln(x-1)+\ln(x-2)=2\ln(x-3). \tag{1}$$

Odredite sva rješenja (u $\mathbb{R}$) jednadžbe

$$\ln(x-1)+\ln(x-2)=2\ln(x-3). \tag{1}$$

Rješenje.

Imamo

$$\begin{aligned} & \ln(x-1)+\ln(x-2)=2\ln(x-3) \\ \Rightarrow \quad & \ln\left((x-1)(x-2)\right)=\ln\left((x-3)^2\right) \end{aligned}$$

Odredite sva rješenja (u $\mathbb{R}$) jednadžbe

$$\ln(x-1)+\ln(x-2)=2\ln(x-3). \tag{1}$$

Rješenje.

Imamo

$$\begin{aligned} & \ln(x-1)+\ln(x-2)=2\ln(x-3) \\ \Rightarrow \quad & \ln\left((x-1)(x-2)\right)=\ln\left((x-3)^2\right) \\ \overset{e\hat{}}{\Rightarrow} \quad & (x-1)(x-2)=(x-3)^2 \end{aligned}$$

Zadatak 14(a)

Odredite sva rješenja (u $\mathbb{R}$) jednadžbe

$$\ln(x-1)+\ln(x-2)=2\ln(x-3). \tag{1}$$

Rješenje.

Imamo

$$\begin{aligned} &\ln(x-1)+\ln(x-2)=2\ln(x-3)\\ \Rightarrow\quad &\ln\left((x-1)(x-2)\right)=\ln\left((x-3)^2\right)\\ \overset{e\hat{}}{\Rightarrow}\quad &(x-1)(x-2)=(x-3)^2\\ \Leftrightarrow\quad &x^2-3x+2=x^2-6x+9 \end{aligned}$$

Zadatak 14(a)

Odredite sva rješenja (u $\mathbb{R}$) jednadžbe

$$\ln(x-1)+\ln(x-2)=2\ln(x-3). \tag{1}$$

Rješenje.

Imamo

$$\begin{aligned}
& \ln(x-1)+\ln(x-2)=2\ln(x-3) \\
\Rightarrow \quad & \ln\left((x-1)(x-2)\right)=\ln\left((x-3)^2\right) \\
\overset{e\hat{}}{\Rightarrow} \quad & (x-1)(x-2)=(x-3)^2 \\
\Leftrightarrow \quad & x^2-3x+2=x^2-6x+9 \\
\Leftrightarrow \quad & 3x=7
\end{aligned}$$

Zadatak 14(a)

Odredite sva rješenja (u $\mathbb{R}$) jednadžbe

$$\ln(x-1)+\ln(x-2)=2\ln(x-3). \tag{1}$$

Rješenje.

Imamo

$$\begin{aligned} & \ln(x-1)+\ln(x-2)=2\ln(x-3) \\ \Rightarrow \quad & \ln\left((x-1)(x-2)\right)=\ln\left((x-3)^2\right) \\ \overset{e\hat{}}{\Rightarrow} \quad & (x-1)(x-2)=(x-3)^2 \\ \Leftrightarrow \quad & x^2-3x+2=x^2-6x+9 \\ \Leftrightarrow \quad & 3x=7 \\ \Leftrightarrow \quad & x=\frac{7}{3} \end{aligned}$$

Zadatak 14(a)

Odredite sva rješenja (u $\mathbb{R}$) jednadžbe

$$\ln(x-1) + \ln(x-2) = 2\ln(x-3). \tag{1}$$

Rješenje.

Imamo

$$\begin{aligned} & \ln(x-1) + \ln(x-2) = 2\ln(x-3) \\ \Rightarrow \quad & \ln\left((x-1)(x-2)\right) = \ln\left((x-3)^2\right) \\ \overset{e\hat{}}{\Rightarrow} \quad & (x-1)(x-2) = (x-3)^2 \\ \Leftrightarrow \quad & x^2 - 3x + 2 = x^2 - 6x + 9 \\ \Leftrightarrow \quad & 3x = 7 \\ \Leftrightarrow \quad & x = \frac{7}{3} \text{ ✗} \end{aligned}$$

Zadatak 14(a)

Odredite sva rješenja (u $\mathbb{R}$) jednadžbe

$$\ln(x-1)+\ln(x-2)=2\ln(x-3). \tag{1}$$

Rješenje.

Imamo

$$\begin{aligned}
& \ln(x-1)+\ln(x-2)=2\ln(x-3) \\
\Rightarrow \quad & \ln\left((x-1)(x-2)\right)=\ln\left((x-3)^2\right) \\
\overset{e\hat{}}{\Rightarrow} \quad & (x-1)(x-2)=(x-3)^2 \\
\Leftrightarrow \quad & x^2-3x+2=x^2-6x+9 \\
\Leftrightarrow \quad & 3x=7 \\
\Leftrightarrow \quad & x=\frac{7}{3} \text{ ✗}
\end{aligned}$$

$\Rightarrow$ zadana jednadžba nema rješenja.

Zadatak 14(a)

Odredite sva rješenja (u $\mathbb{R}$) jednadžbe

$$\ln(x-1)+\ln(x-2)=2\ln(x-3). \tag{1}$$

Rješenje. Da bi lijeva i desna strana u (1) bile definirane, x mora

zadovoljavati uvjete: $\begin{cases} x-1>0 \\ x-2>0 \\ x-3>0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad x>3.$

Imamo

$$\begin{aligned}
& \ln(x-1)+\ln(x-2)=2\ln(x-3) \\
\Rightarrow \quad & \ln\left((x-1)(x-2)\right)=\ln\left((x-3)^2\right) \\
\overset{e^{\hat{}}}{\Rightarrow} \quad & (x-1)(x-2)=(x-3)^2 \\
\Leftrightarrow \quad & x^2-3x+2=x^2-6x+9 \\
\Leftrightarrow \quad & 3x=7 \\
\Leftrightarrow \quad & x=\frac{7}{3} \text{ ✗}
\end{aligned}$$

$\Rightarrow$ zadana jednadžba nema rješenja.

Zadatak 14(b)

Odredite sva rješenja (u $\mathbb{R}$) jednadžbe

$$\log x + \log(x-3) = 1. \tag{2}$$

Zadatak 14(b)

Odredite sva rješenja (u $\mathbb{R}$) jednadžbe

$$\log x + \log(x-3) = 1. \tag{2}$$

Rješenje. Da bi lijeva i desna strana u (2) bile definirane, x mora zadovoljavati uvjete: $\begin{cases} x > 0 \\ x - 3 > 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad x > 3.$

Zadatak 14(b)

Odredite sva rješenja (u $\mathbb{R}$) jednadžbe

$$\log x + \log(x-3) = 1. \qquad (2)$$

Rješenje. Da bi lijeva i desna strana u (2) bile definirane, x mora zadovoljavati uvjete: $\begin{cases} x > 0 \\ x - 3 > 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad x > 3.$

Imamo

$$\begin{aligned} &\log x + \log(x-3) = 1 \\ \Rightarrow \quad &\log\left(x(x-3)\right) = 1 \end{aligned}$$

Zadatak 14(b)

Odredite sva rješenja (u $\mathbb{R}$) jednadžbe

$$\log x + \log(x-3) = 1. \tag{2}$$

Rješenje. Da bi lijeva i desna strana u (2) bile definirane, x mora zadovoljavati uvjete: $\begin{cases} x > 0 \\ x - 3 > 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad x > 3.$

Imamo

$$\begin{aligned} & \log x + \log(x-3) = 1 \\ \Rightarrow \quad & \log\left(x(x-3)\right) = 1 \\ \overset{10\hat{}}{\Rightarrow} \quad & x(x-3) = 10 \end{aligned}$$

Zadatak 14(b)

Odredite sva rješenja (u $\mathbb{R}$) jednadžbe

$$\log x + \log(x-3) = 1. \tag{2}$$

Rješenje. Da bi lijeva i desna strana u (2) bile definirane, x mora zadovoljavati uvjete: $\begin{cases} x > 0 \\ x - 3 > 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad x > 3.$

Imamo

$$\begin{aligned} &\log x + \log(x-3) = 1 \\ \Rightarrow \quad & \log\left(x(x-3)\right) = 1 \\ \overset{10\hat{}}{\Rightarrow} \quad & x(x-3) = 10 \\ \Rightarrow \quad & x^2 - 3x - 10 = 0 \end{aligned}$$

Zadatak 14(b)

Odredite sva rješenja (u $\mathbb{R}$) jednadžbe

$$\log x + \log(x-3) = 1. \tag{2}$$

Rješenje. Da bi lijeva i desna strana u (2) bile definirane, x mora zadovoljavati uvjete: $\begin{cases} x > 0 \\ x - 3 > 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad x > 3.$

Imamo

$$\begin{aligned} &\log x + \log(x-3) = 1 \\ &\Rightarrow \quad \log\left(x(x-3)\right) = 1 \\ &\overset{10^{\wedge}}{\Rightarrow} \quad x(x-3) = 10 \\ &\Rightarrow \quad x^2 - 3x - 10 = 0 \\ &\Rightarrow \quad (x-5)(x+2) = 0 \end{aligned}$$

Zadatak 14(b)

Odredite sva rješenja (u $\mathbb{R}$) jednadžbe

$$\log x + \log(x-3) = 1. \tag{2}$$

Rješenje. Da bi lijeva i desna strana u (2) bile definirane, x mora zadovoljavati uvjete: $\begin{cases} x > 0 \\ x - 3 > 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad x > 3.$

Imamo

$$\begin{aligned}
&\log x + \log(x-3) = 1 \\
&\Rightarrow \quad \log\left(x(x-3)\right) = 1 \\
&\overset{10\hat{}}{\Rightarrow} \quad x(x-3) = 10 \\
&\Rightarrow \quad x^2 - 3x - 10 = 0 \\
&\Rightarrow \quad (x-5)(x+2) = 0 \\
&\Rightarrow \quad x = 5 \quad \text{ili} \quad x = -2
\end{aligned}$$

Zadatak 14(b)

Odredite sva rješenja (u $\mathbb{R}$) jednadžbe

$$\log x + \log(x-3) = 1. \tag{2}$$

Rješenje. Da bi lijeva i desna strana u (2) bile definirane, x mora zadovoljavati uvjete: $\begin{cases} x > 0 \\ x - 3 > 0 \end{cases} \iff x > 3.$

Imamo

$$\begin{aligned} & \log x + \log(x-3) = 1 \\ \Rightarrow \quad & \log\left(x(x-3)\right) = 1 \\ \overset{10\hat{}}{\Rightarrow} \quad & x(x-3) = 10 \\ \Rightarrow \quad & x^2 - 3x - 10 = 0 \\ \Rightarrow \quad & (x-5)(x+2) = 0 \\ \Rightarrow \quad & x = 5 \checkmark \text{ ili } \quad x = -2 \end{aligned}$$

Zadatak 14(b)

Odredite sva rješenja (u $\mathbb{R}$) jednadžbe

$$\log x + \log(x-3) = 1. \tag{2}$$

Rješenje. Da bi lijeva i desna strana u (2) bile definirane, x mora zadovoljavati uvjete: $\begin{cases} x > 0 \\ x - 3 > 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad x > 3.$

Imamo

$$\begin{aligned} &\log x + \log(x-3) = 1 \\ \Rightarrow \quad & \log\left(x(x-3)\right) = 1 \\ \overset{10\hat{}}{\Rightarrow} \quad & x(x-3) = 10 \\ \Rightarrow \quad & x^2 - 3x - 10 = 0 \\ \Rightarrow \quad & (x-5)(x+2) = 0 \\ \Rightarrow \quad & x = 5 \checkmark \ \text{ili} \quad x = -2 \ \text{✗} \end{aligned}$$

Zadatak 14(b)

Odredite sva rješenja (u $\mathbb{R}$) jednadžbe

$$\log x + \log(x-3) = 1. \tag{2}$$

Rješenje. Da bi lijeva i desna strana u (2) bile definirane, x mora zadovoljavati uvjete: $\begin{cases} x > 0 \\ x - 3 > 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad x > 3.$

Imamo

$$\begin{aligned} & \log x + \log(x-3) = 1 \\ \Rightarrow \quad & \log\left(x(x-3)\right) = 1 \\ \overset{10\hat{}}{\Rightarrow} \quad & x(x-3) = 10 \\ \Rightarrow \quad & x^2 - 3x - 10 = 0 \\ \Rightarrow \quad & (x-5)(x+2) = 0 \\ \Rightarrow \quad & x = 5 \ \checkmark \ \text{ili} \quad x = -2 \ \text{✗} \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ jedino je rješenje zadane jednadžbe 5.

Zadatak 14(c)

Odredite sva rješenja (u $\mathbb{R}$) jednadžbe

$$(\log(100x))^2 + (\log(10x))^2 = 14 + \log\frac{1}{x}.$$

Zadatak 14(c)

Odredite sva rješenja (u $\mathbb{R}$) jednadžbe

$$(\log(100x))^2 + (\log(10x))^2 = 14 + \log\frac{1}{x}.$$

Rješenje. $(\log(100x))^2 + (\log(10x))^2 = 14 + \log\frac{1}{x}$

$$\Leftrightarrow \quad (\log 100 + \log x)^2 + (\log 10 + \log x)^2 = 14 + \log\left(x^{-1}\right)$$

Zadatak 14(c)

Odredite sva rješenja (u $\mathbb{R}$) jednadžbe

$$(\log(100x))^2 + (\log(10x))^2 = 14 + \log\frac{1}{x}.$$

Rješenje. $(\log(100x))^2 + (\log(10x))^2 = 14 + \log\frac{1}{x}$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow \quad (\log 100 + \log x)^2 + (\log 10 + \log x)^2 = 14 + \log\left(x^{-1}\right) \\
&\Leftrightarrow \quad (2 + \log x)^2 + (1 + \log x)^2 = 14 - \log x
\end{aligned}$$

Zadatak 14(c)

Odredite sva rješenja (u $\mathbb{R}$) jednadžbe

$$(\log(100x))^2 + (\log(10x))^2 = 14 + \log\frac{1}{x}.$$

Rješenje. $(\log(100x))^2 + (\log(10x))^2 = 14 + \log\frac{1}{x}$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow \quad (\log 100 + \log x)^2 + (\log 10 + \log x)^2 = 14 + \log\left(x^{-1}\right)\\
&\Leftrightarrow \quad (2 + \log x)^2 + (1 + \log x)^2 = 14 - \log x\\
&\Leftrightarrow \quad 2(\log x)^2 + 7\log x - 9 = 0
\end{aligned}$$

Zadatak 14(c)

Odredite sva rješenja (u $\mathbb{R}$) jednadžbe

$$(\log(100x))^2 + (\log(10x))^2 = 14 + \log\frac{1}{x}.$$

Rješenje. $(\log(100x))^2 + (\log(10x))^2 = 14 + \log\frac{1}{x}$

$$\Leftrightarrow \quad (\log 100 + \log x)^2 + (\log 10 + \log x)^2 = 14 + \log\left(x^{-1}\right)$$

$$\Leftrightarrow \quad (2 + \log x)^2 + (1 + \log x)^2 = 14 - \log x$$

$$\Leftrightarrow \quad 2(\log x)^2 + 7\log x - 9 = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad (\text{supstitucija } t = \log x) \quad \Leftrightarrow \quad 2t^2 + 7t - 9 = 0$$

Zadatak 14(c)

Odredite sva rješenja (u $\mathbb{R}$) jednadžbe

$$(\log(100x))^2 + (\log(10x))^2 = 14 + \log\frac{1}{x}.$$

Rješenje. $(\log(100x))^2 + (\log(10x))^2 = 14 + \log\frac{1}{x}$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow \quad (\log 100 + \log x)^2 + (\log 10 + \log x)^2 = 14 + \log\left(x^{-1}\right)\\
&\Leftrightarrow \quad (2 + \log x)^2 + (1 + \log x)^2 = 14 - \log x\\
&\Leftrightarrow \quad 2(\log x)^2 + 7\log x - 9 = 0\\
&\Leftrightarrow \quad (\text{supstitucija } t = \log x) \quad \Leftrightarrow \quad 2t^2 + 7t - 9 = 0\\
&\Leftrightarrow \quad t = \frac{-7 \pm \sqrt{49 + 72}}{4} = \frac{-7 \pm 11}{4}
\end{aligned}$$

Zadatak 14(c)

Odredite sva rješenja (u $\mathbb{R}$) jednadžbe

$$(\log(100x))^2 + (\log(10x))^2 = 14 + \log\frac{1}{x}.$$

Rješenje. $(\log(100x))^2 + (\log(10x))^2 = 14 + \log\frac{1}{x}$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow \quad (\log 100 + \log x)^2 + (\log 10 + \log x)^2 = 14 + \log\left(x^{-1}\right) \\
&\Leftrightarrow \quad (2 + \log x)^2 + (1 + \log x)^2 = 14 - \log x \\
&\Leftrightarrow \quad 2(\log x)^2 + 7\log x - 9 = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad (\text{supstitucija } t = \log x) \quad \Leftrightarrow \quad 2t^2 + 7t - 9 = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad t = \frac{-7 \pm \sqrt{49 + 72}}{4} = \frac{-7 \pm 11}{4} \\
&\Leftrightarrow \quad t = -\frac{9}{2} \qquad \text{ili} \qquad t = 1
\end{aligned}$$

Zadatak 14(c)

Odredite sva rješenja (u $\mathbb{R}$) jednadžbe

$$(\log(100x))^2 + (\log(10x))^2 = 14 + \log\frac{1}{x}.$$

Rješenje. $(\log(100x))^2 + (\log(10x))^2 = 14 + \log\frac{1}{x}$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow \quad (\log 100 + \log x)^2 + (\log 10 + \log x)^2 = 14 + \log\left(x^{-1}\right)\\
&\Leftrightarrow \quad (2 + \log x)^2 + (1 + \log x)^2 = 14 - \log x\\
&\Leftrightarrow \quad 2(\log x)^2 + 7\log x - 9 = 0\\
&\Leftrightarrow \quad (\text{supstitucija } t = \log x) \quad \Leftrightarrow \quad 2t^2 + 7t - 9 = 0\\
&\Leftrightarrow \quad t = \frac{-7 \pm \sqrt{49 + 72}}{4} = \frac{-7 \pm 11}{4}\\
&\Leftrightarrow \quad t = -\frac{9}{2} \quad \text{ili} \quad t = 1\\
&\Leftrightarrow \quad \log x = -\frac{9}{2} \quad \text{ili} \quad \log x = 1
\end{aligned}$$

Zadatak 14(c)

Odredite sva rješenja (u $\mathbb{R}$) jednadžbe

$$(\log(100x))^2 + (\log(10x))^2 = 14 + \log\frac{1}{x}.$$

Rješenje. $(\log(100x))^2 + (\log(10x))^2 = 14 + \log\frac{1}{x}$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow \quad (\log 100 + \log x)^2 + (\log 10 + \log x)^2 = 14 + \log\left(x^{-1}\right) \\
&\Leftrightarrow \quad (2 + \log x)^2 + (1 + \log x)^2 = 14 - \log x \\
&\Leftrightarrow \quad 2(\log x)^2 + 7\log x - 9 = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad (\text{supstitucija } t = \log x) \quad \Leftrightarrow \quad 2t^2 + 7t - 9 = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad t = \frac{-7 \pm \sqrt{49 + 72}}{4} = \frac{-7 \pm 11}{4} \\
&\Leftrightarrow \quad t = -\frac{9}{2} \qquad \text{ili} \qquad t = 1 \\
&\Leftrightarrow \quad \log x = -\frac{9}{2} \qquad \text{ili} \qquad \log x = 1 \\
&\overset{10^\wedge}{\Leftrightarrow} \quad x = 10^{-\frac{9}{2}} \qquad \text{ili} \qquad x = 10.
\end{aligned}$$

Zadatak 14(d)

Odredite sva rješenja (u $\mathbb{R}$) jednadžbe

$$\log_3 \log_8 \log_2 x = \log_3 2 - 1.$$

Zadatak 14(d)

Odredite sva rješenja (u $\mathbb{R}$) jednadžbe

$$\log_3 \log_8 \log_2 x = \log_3 2 - 1.$$

Rješenje. Imamo

$$\begin{aligned} & \log_3 \log_8 \log_2 x = \log_3 2 - 1 \\ \overset{3\hat{}}{\Leftrightarrow} \quad & \log_8 \log_2 x = 3^{\log_3 2 - 1} = 3^{\log_3 2} \cdot 3^{-1} = 2 \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{3} \end{aligned}$$

Zadatak 14(d)

Odredite sva rješenja (u $\mathbb{R}$) jednadžbe

$$\log_3 \log_8 \log_2 x = \log_3 2 - 1.$$

Rješenje. Imamo

$$\begin{aligned}
&\log_3 \log_8 \log_2 x = \log_3 2 - 1 \\
\overset{3\hat{}}{\Leftrightarrow} \quad &\log_8 \log_2 x = 3^{\log_3 2 - 1} = 3^{\log_3 2} \cdot 3^{-1} = 2 \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{3} \\
\overset{8\hat{}}{\Leftrightarrow} \quad &\log_2 x = 8^{\frac{2}{3}} = \left(2^3\right)^{\frac{2}{3}} = 2^{3 \cdot \frac{2}{3}} = 2^2 = 4
\end{aligned}$$

Zadatak 14(d)

Odredite sva rješenja (u $\mathbb{R}$) jednadžbe

$$\log_3 \log_8 \log_2 x = \log_3 2 - 1.$$

Rješenje. Imamo

$$\begin{aligned}
&\log_3 \log_8 \log_2 x = \log_3 2 - 1 \\
\overset{3\hat{}}{\Leftrightarrow} \quad & \log_8 \log_2 x = 3^{\log_3 2 - 1} = 3^{\log_3 2} \cdot 3^{-1} = 2 \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{3} \\
\overset{8\hat{}}{\Leftrightarrow} \quad & \log_2 x = 8^{\frac{2}{3}} = \left(2^3\right)^{\frac{2}{3}} = 2^{3 \cdot \frac{2}{3}} = 2^2 = 4 \\
\overset{2\hat{}}{\Leftrightarrow} \quad & x = 2^4 = 16.
\end{aligned}$$

Zadatak 14(d)

Odredite sva rješenja (u $\mathbb{R}$) jednadžbe

$$\log_3 \log_8 \log_2 x = \log_3 2 - 1.$$

Rješenje. Imamo

$$\begin{aligned}
&\log_3 \log_8 \log_2 x = \log_3 2 - 1 \\
\overset{3\hat{}}{\Leftrightarrow} \quad & \log_8 \log_2 x = 3^{\log_3 2 - 1} = 3^{\log_3 2} \cdot 3^{-1} = 2 \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{3} \\
\overset{8\hat{}}{\Leftrightarrow} \quad & \log_2 x = 8^{\frac{2}{3}} = \left(2^3\right)^{\frac{2}{3}} = 2^{3 \cdot \frac{2}{3}} = 2^2 = 4 \\
\overset{2\hat{}}{\Leftrightarrow} \quad & x = 2^4 = 16.
\end{aligned}$$

Dakle, jedino je rješenje zadane jednadžbe 16.

Zadatak 14(e)

Odredite sva rješenja (u $\mathbb{R}$) jednadžbe

$$\log_4 x + \log_8 x = 5.$$

Odredite sva rješenja (u $\mathbb{R}$) jednadžbe

$$\log_4 x + \log_8 x = 5.$$

Rješenje. Sjetimo se da vrijedi

$$\log_{a^N} x = \frac{1}{N} \log_a x \tag{3}$$

za sve $a \in \langle 0, 1\rangle \cup \langle 1, +\infty\rangle$, $N \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ i $x \in \langle 0, +\infty\rangle$

Odredite sva rješenja (u $\mathbb{R}$) jednadžbe

$$\log_4 x + \log_8 x = 5.$$

Rješenje. Sjetimo se da vrijedi

$$\log_{a^N} x = \frac{1}{N} \log_a x \tag{3}$$

za sve $a \in \langle 0, 1\rangle \cup \langle 1, +\infty\rangle$, $N \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ i $x \in \langle 0, +\infty\rangle$, pa imamo

$$\log_4 x + \log_8 x = 5 \quad \Leftrightarrow \quad \log_{2^2} x + \log_{2^3} x = 5$$

Zadatak 14(e)

Odredite sva rješenja (u $\mathbb{R}$) jednadžbe

$$\log_4 x + \log_8 x = 5.$$

Rješenje. Sjetimo se da vrijedi

$$\log_{a^N} x = \frac{1}{N} \log_a x \tag{3}$$

za sve $a \in \langle 0,1\rangle \cup \langle 1,+\infty\rangle$, $N \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ i $x \in \langle 0,+\infty\rangle$, pa imamo

$$\begin{aligned} \log_4 x + \log_8 x = 5 \quad &\Leftrightarrow \quad \log_{2^2} x + \log_{2^3} x = 5 \\ &\overset{(3)}{\Leftrightarrow} \quad \frac{1}{2}\log_2 x + \frac{1}{3}\log_2 x = 5 \end{aligned}$$

Zadatak 14(e)

Odredite sva rješenja (u $\mathbb{R}$) jednadžbe

$$\log_4 x + \log_8 x = 5.$$

Rješenje. Sjetimo se da vrijedi

$$\log_{a^N} x = \frac{1}{N} \log_a x \tag{3}$$

za sve $a \in \langle 0, 1\rangle \cup \langle 1, +\infty\rangle$, $N \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ i $x \in \langle 0, +\infty\rangle$, pa imamo

$$\begin{aligned} \log_4 x + \log_8 x = 5 \quad &\Leftrightarrow \quad \log_{2^2} x + \log_{2^3} x = 5 \\ &\overset{(3)}{\Leftrightarrow} \quad \frac{1}{2} \log_2 x + \frac{1}{3} \log_2 x = 5 \\ &\Leftrightarrow \quad \frac{5}{6} \log_2 x = 5 \end{aligned}$$

Zadatak 14(e)

Odredite sva rješenja (u $\mathbb{R}$) jednadžbe

$$\log_4 x + \log_8 x = 5.$$

Rješenje. Sjetimo se da vrijedi

$$\log_{a^N} x = \frac{1}{N} \log_a x \tag{3}$$

za sve $a \in \langle 0, 1\rangle \cup \langle 1, +\infty\rangle$, $N \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ i $x \in \langle 0, +\infty\rangle$, pa imamo

$$\begin{aligned} \log_4 x + \log_8 x = 5 \quad &\Leftrightarrow \quad \log_{2^2} x + \log_{2^3} x = 5 \\ &\overset{(3)}{\Leftrightarrow} \quad \frac{1}{2} \log_2 x + \frac{1}{3} \log_2 x = 5 \\ &\Leftrightarrow \quad \frac{5}{6} \log_2 x = 5 \\ &\Leftrightarrow \quad \log_2 x = 6 \end{aligned}$$

Zadatak 14(e)

Odredite sva rješenja (u $\mathbb{R}$) jednadžbe

$$\log_4 x + \log_8 x = 5.$$

Rješenje. Sjetimo se da vrijedi

$$\log_{a^N} x = \frac{1}{N} \log_a x \tag{3}$$

za sve $a \in \langle 0, 1\rangle \cup \langle 1, +\infty\rangle$, $N \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ i $x \in \langle 0, +\infty\rangle$, pa imamo

$$\begin{aligned}
\log_4 x + \log_8 x = 5 \quad &\Leftrightarrow \quad \log_{2^2} x + \log_{2^3} x = 5 \\
&\overset{(3)}{\Leftrightarrow} \quad \frac{1}{2} \log_2 x + \frac{1}{3} \log_2 x = 5 \\
&\Leftrightarrow \quad \frac{5}{6} \log_2 x = 5 \\
&\Leftrightarrow \quad \log_2 x = 6 \\
&\overset{2\hat{}}{\Leftrightarrow} \quad x = 2^6 = 64.
\end{aligned}$$

Zadatak 14(e)

Odredite sva rješenja (u $\mathbb{R}$) jednadžbe

$$\log_4 x + \log_8 x = 5.$$

Rješenje. Sjetimo se da vrijedi

$$\log_{a^N} x = \frac{1}{N} \log_a x \tag{3}$$

za sve $a \in \langle 0, 1\rangle \cup \langle 1, +\infty\rangle$, $N \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ i $x \in \langle 0, +\infty\rangle$, pa imamo

$$\begin{aligned}
\log_4 x + \log_8 x = 5 \quad &\Leftrightarrow \quad \log_{2^2} x + \log_{2^3} x = 5 \\
&\overset{(3)}{\Leftrightarrow} \quad \frac{1}{2} \log_2 x + \frac{1}{3} \log_2 x = 5 \\
&\Leftrightarrow \quad \frac{5}{6} \log_2 x = 5 \\
&\Leftrightarrow \quad \log_2 x = 6 \\
&\overset{2\hat{}}{\Leftrightarrow} \quad x = 2^6 = 64.
\end{aligned}$$

Dakle, jedino je rješenje zadane jednadžbe 64.

Strogo rastuće funkcije i rješavanje nejednadžbi

Definicija. Kažemo da je funkcija $f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ **strogo rastuća** ako za sve $x_1, x_2 \in D$ vrijedi

$$x_1 < x_2 \quad \Rightarrow \quad f(x_1) < f(x_2).$$

Strogo rastuće funkcije i rješavanje nejednadžbi

Definicija. Kažemo da je funkcija $f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ **strogo rastuća** ako za sve $x_1, x_2 \in D$ vrijedi

$$x_1 < x_2 \quad \Rightarrow \quad f(x_1) < f(x_2).$$

PR.: Sljedeće su funkcije strogo rastuće:

- $f(x) := ax + b$, gdje su $a \in \langle 0, +\infty \rangle$ i $b \in \mathbb{R}$.

Strogo rastuće funkcije i rješavanje nejednadžbi

Definicija. Kažemo da je funkcija $f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ **strogo rastuća** ako za sve $x_1, x_2 \in D$ vrijedi

$$x_1 < x_2 \quad \Rightarrow \quad f(x_1) < f(x_2).$$

PR.: Sljedeće su funkcije strogo rastuće:

- $f(x) := ax + b$, gdje su $a \in \langle 0, +\infty\rangle$ i $b \in \mathbb{R}$.
- $f(x) := a^x$, gdje je $a \in \langle 1, +\infty\rangle$

Strogo rastuće funkcije i rješavanje nejednadžbi

Definicija. Kažemo da je funkcija $f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ **strogo rastuća** ako za sve $x_1, x_2 \in D$ vrijedi

$$x_1 < x_2 \quad \Rightarrow \quad f(x_1) < f(x_2).$$

PR.: Sljedeće su funkcije strogo rastuće:

- $f(x) := ax + b$, gdje su $a \in \langle 0, +\infty \rangle$ i $b \in \mathbb{R}$.
- $f(x) := a^x$, gdje je $a \in \langle 1, +\infty \rangle$
- $f(x) := \log_a x$, gdje je $a \in \langle 1, +\infty \rangle$.

Strogo rastuće funkcije i rješavanje nejednadžbi

Definicija. Kažemo da je funkcija $f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ **strogo rastuća** ako za sve $x_1, x_2 \in D$ vrijedi

$$x_1 < x_2 \quad \Rightarrow \quad f(x_1) < f(x_2).$$

PR.: Sljedeće su funkcije strogo rastuće:

- $f(x) := ax + b$, gdje su $a \in \langle 0, +\infty\rangle$ i $b \in \mathbb{R}$.
- $f(x) := a^x$, gdje je $a \in \langle 1, +\infty\rangle$
- $f(x) := \log_a x$, gdje je $a \in \langle 1, +\infty\rangle$.

Lako se vidi da, ako je funkcija $f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ strogo rastuća, tada za sve $x_1, x_2 \in D$ vrijede ekvivalencije:

- $x_1 < x_2 \quad \Leftrightarrow \quad f(x_1) < f(x_2)$
- $x_1 \leq x_2 \quad \Leftrightarrow \quad f(x_1) \leq f(x_2)$
- $x_1 > x_2 \quad \Leftrightarrow \quad f(x_1) > f(x_2)$
- $x_1 \geq x_2 \quad \Leftrightarrow \quad f(x_1) \geq f(x_2)$.

Strogo rastuće funkcije i rješavanje nejednadžbi

Definicija. Kažemo da je funkcija $f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ **strogo rastuća** ako za sve $x_1, x_2 \in D$ vrijedi

$$x_1 < x_2 \quad \Rightarrow \quad f(x_1) < f(x_2).$$

PR.: Sljedeće su funkcije strogo rastuće:

- $f(x) := ax + b$, gdje su $a \in \langle 0, +\infty \rangle$ i $b \in \mathbb{R}$.
- $f(x) := a^x$, gdje je $a \in \langle 1, +\infty \rangle$
- $f(x) := \log_a x$, gdje je $a \in \langle 1, +\infty \rangle$.

Lako se vidi da, ako je funkcija $f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ strogo rastuća, tada za sve $x_1, x_2 \in D$ vrijede ekvivalencije:

- $x_1 < x_2 \quad \Leftrightarrow \quad f(x_1) < f(x_2)$
- $x_1 \leq x_2 \quad \Leftrightarrow \quad f(x_1) \leq f(x_2)$
- $x_1 > x_2 \quad \Leftrightarrow \quad f(x_1) > f(x_2)$
- $x_1 \geq x_2 \quad \Leftrightarrow \quad f(x_1) \geq f(x_2)$.

Drugim riječima: ako na lijevu i desnu stranu neke nejednadžbe djelujemo strogo rastućom funkcijom, dobit ćemo ekvivalentnu nejednadžbu.

Primjer 1

Riješimo nejednadžbu

$$2x + 1 \geq 3. \tag{4}$$

Primjer 1

Riješimo nejednadžbu

$$2x + 1 \geq 3. \tag{4}$$

Djelovanjem na njenu lijevu i desnu stranu (strogo rastućom) funkcijom $f(x) := x - 1$, dobivamo ekvivalentnu nejednadžbu

$$2x \geq 2.$$

Primjer 1

Riješimo nejednadžbu

$$2x + 1 \geq 3. \tag{4}$$

Djelovanjem na njenu lijevu i desnu stranu (strogo rastućom) funkcijom $f(x) := x - 1$, dobivamo ekvivalentnu nejednadžbu

$$2x \geq 2.$$

Djelovanjem na njenu lijevu i desnu stranu (strogo rastućom) funkcijom $g(x) := \frac{1}{2}x$ dobivamo ekvivalentnu nejednadžbu

$$x \geq 1.$$

Primjer 1

Riješimo nejednadžbu

$$2x + 1 \geq 3. \tag{4}$$

Djelovanjem na njenu lijevu i desnu stranu (strogo rastućom) funkcijom $f(x) := x - 1$, dobivamo ekvivalentnu nejednadžbu

$$2x \geq 2.$$

Djelovanjem na njenu lijevu i desnu stranu (strogo rastućom) funkcijom $g(x) := \frac{1}{2}x$ dobivamo ekvivalentnu nejednadžbu

$$x \geq 1.$$

Dakle, rješenje nejednadžbe (4) je $[1, +\infty\rangle$.

Primjer 2

Riješimo nejednadžbu

$$e^x < 3. \tag{5}$$

Primjer 2

Riješimo nejednadžbu

$$e^x < 3. \tag{5}$$

Djelovanjem na njenu lijevu i desnu stranu (strogo rastućom) funkcijom $f(x) := \ln x$, dobivamo ekvivalentnu nejednadžbu

$$x < \ln 3.$$

Primjer 2

Riješimo nejednadžbu

$$e^x < 3. \tag{5}$$

Djelovanjem na njenu lijevu i desnu stranu (strogo rastućom) funkcijom $f(x) := \ln x$, dobivamo ekvivalentnu nejednadžbu

$$x < \ln 3.$$

Dakle, rješenje nejednadžbe (5) je $\langle -\infty, \ln 3 \rangle$.

Strogo padajuće funkcije i rješavanje nejednadžbi

Definicija. Kažemo da je funkcija $f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ **strogo padajuća** ako za sve $x_1, x_2 \in D$ vrijedi

$$x_1 < x_2 \quad \Rightarrow \quad f(x_1) > f(x_2).$$

Strogo padajuće funkcije i rješavanje nejednadžbi

Definicija. Kažemo da je funkcija $f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ **strogo padajuća** ako za sve $x_1, x_2 \in D$ vrijedi

$$x_1 < x_2 \quad \Rightarrow \quad f(x_1) > f(x_2).$$

PR.: Sljedeće su funkcije strogo padajuće:

- $f(x) := ax + b$, gdje su $a \in \langle -\infty, 0 \rangle$ i $b \in \mathbb{R}$.

Strogo padajuće funkcije i rješavanje nejednadžbi

Definicija. Kažemo da je funkcija $f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ **strogo padajuća** ako za sve $x_1, x_2 \in D$ vrijedi

$$x_1 < x_2 \quad \Rightarrow \quad f(x_1) > f(x_2).$$

PR.: Sljedeće su funkcije strogo padajuće:

- $f(x) := ax + b$, gdje su $a \in \langle -\infty, 0 \rangle$ i $b \in \mathbb{R}$.
- $f(x) := a^x$, gdje je $a \in \langle 0, 1 \rangle$

Strogo padajuće funkcije i rješavanje nejednadžbi

Definicija. Kažemo da je funkcija $f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ **strogo padajuća** ako za sve $x_1, x_2 \in D$ vrijedi

$$x_1 < x_2 \quad \Rightarrow \quad f(x_1) > f(x_2).$$

PR.: Sljedeće su funkcije strogo padajuće:

- $f(x) := ax + b$, gdje su $a \in \langle -\infty, 0\rangle$ i $b \in \mathbb{R}$.
- $f(x) := a^x$, gdje je $a \in \langle 0, 1\rangle$
- $f(x) := \log_a x$, gdje je $a \in \langle 0, 1\rangle$.

Strogo padajuće funkcije i rješavanje nejednadžbi

Definicija. Kažemo da je funkcija $f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ **strogo padajuća** ako za sve $x_1, x_2 \in D$ vrijedi

$$x_1 < x_2 \quad \Rightarrow \quad f(x_1) > f(x_2).$$

PR.: Sljedeće su funkcije strogo padajuće:

- $f(x) := ax + b$, gdje su $a \in \langle -\infty, 0\rangle$ i $b \in \mathbb{R}$.
- $f(x) := a^x$, gdje je $a \in \langle 0, 1\rangle$
- $f(x) := \log_a x$, gdje je $a \in \langle 0, 1\rangle$.

Lako se vidi da, ako je funkcija $f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ strogo padajuća, tada za sve $x_1, x_2 \in D$ vrijede ekvivalencije:

- $x_1 < x_2 \quad \Leftrightarrow \quad f(x_1) > f(x_2)$
- $x_1 \leq x_2 \quad \Leftrightarrow \quad f(x_1) \geq f(x_2)$
- $x_1 > x_2 \quad \Leftrightarrow \quad f(x_1) < f(x_2)$
- $x_1 \geq x_2 \quad \Leftrightarrow \quad f(x_1) \leq f(x_2)$.

Strogo padajuće funkcije i rješavanje nejednadžbi

Definicija. Kažemo da je funkcija $f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ **strogo padajuća** ako za sve $x_1, x_2 \in D$ vrijedi

$$x_1 < x_2 \quad \Rightarrow \quad f(x_1) > f(x_2).$$

PR.: Sljedeće su funkcije strogo padajuće:

- $f(x) := ax + b$, gdje su $a \in \langle -\infty, 0\rangle$ i $b \in \mathbb{R}$.
- $f(x) := a^x$, gdje je $a \in \langle 0, 1\rangle$
- $f(x) := \log_a x$, gdje je $a \in \langle 0, 1\rangle$.

Lako se vidi da, ako je funkcija $f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ strogo padajuća, tada za sve $x_1, x_2 \in D$ vrijede ekvivalencije:

- $x_1 < x_2 \quad \Leftrightarrow \quad f(x_1) > f(x_2)$
- $x_1 \leq x_2 \quad \Leftrightarrow \quad f(x_1) \geq f(x_2)$
- $x_1 > x_2 \quad \Leftrightarrow \quad f(x_1) < f(x_2)$
- $x_1 \geq x_2 \quad \Leftrightarrow \quad f(x_1) \leq f(x_2)$.

Drugim riječima: ako na lijevu i desnu stranu neke nejednadžbe djelujemo strogo padajućom funkcijom i pritom **okrenemo znak nejednakosti**, dobit ćemo ekvivalentnu nejednadžbu.

Primjer 3

Riješimo nejednadžbu

$$\left(\frac{7}{10}\right)^{x} \leq \pi. \tag{6}$$

Primjer 3

Riješimo nejednadžbu

$$\left(\frac{7}{10}\right)^x \leq \pi. \tag{6}$$

Djelovanjem na njenu lijevu i desnu stranu (strogo padajućom) funkcijom $f(x) := \log_{\frac{7}{10}} x$ i pritom **okrenemo znak nejednakosti**, dobivamo ekvivalentnu nejednadžbu

$$x \geq \log_{\frac{7}{10}} \pi.$$

Primjer 3

Riješimo nejednadžbu

$$\left(\frac{7}{10}\right)^x \leq \pi. \tag{6}$$

Djelovanjem na njenu lijevu i desnu stranu (strogo padajućom) funkcijom $f(x) := \log_{\frac{7}{10}} x$ i pritom **okrenemo znak nejednakosti**, dobivamo ekvivalentnu nejednadžbu

$$x \geq \log_{\frac{7}{10}} \pi.$$

Dakle, rješenje nejednadžbe (6) je $\left[\log_{\frac{7}{10}} \pi, +\infty\right\rangle$.

Zadatak 15

Riješite nejednadžbu

$$(\log_2 x)^2 \geq 1.$$

Zadatak 15

Riješite nejednadžbu

$$(\log_2 x)^2 \geq 1.$$

Rješenje. Za svaki $x \in \langle 0, +\infty \rangle$ imamo

$$(\log_2 x)^2 \geq 1 \quad \Leftrightarrow \quad (\text{supstitucija } t = \log_2 x) \quad \Leftrightarrow \quad t^2 \geq 1$$

Zadatak 15

Riješite nejednadžbu

$$(\log_2 x)^2 \geq 1.$$

Rješenje. Za svaki $x \in \langle 0, +\infty \rangle$ imamo

$$\begin{aligned}
(\log_2 x)^2 \geq 1 \quad &\Leftrightarrow \quad (\text{supstitucija } t = \log_2 x) \quad \Leftrightarrow \quad t^2 \geq 1 \\
&\Leftrightarrow \quad t^2 - 1 \geq 0
\end{aligned}$$

Zadatak 15

Riješite nejednadžbu

$$(\log_2 x)^2 \geq 1.$$

Rješenje. Za svaki $x \in \langle 0, +\infty \rangle$ imamo

$$\begin{aligned}
(\log_2 x)^2 \geq 1 \quad &\Leftrightarrow \quad (\text{supstitucija } t = \log_2 x) \quad \Leftrightarrow \quad t^2 \geq 1 \\
&\Leftrightarrow \quad t^2 - 1 \geq 0 \\
&\overset{\text{sami}}{\Leftrightarrow} \quad t \in \langle -\infty, -1] \cup [1, +\infty \rangle
\end{aligned}$$

Zadatak 15

Riješite nejednadžbu

$$(\log_2 x)^2 \geq 1.$$

Rješenje. Za svaki $x \in \langle 0, +\infty\rangle$ imamo

$$\begin{aligned}
(\log_2 x)^2 \geq 1 \quad &\Leftrightarrow \quad (\text{supstitucija } t = \log_2 x) \quad \Leftrightarrow \quad t^2 \geq 1 \\
&\Leftrightarrow \quad t^2 - 1 \geq 0 \\
&\overset{\text{sami}}{\Leftrightarrow} \quad t \in \langle -\infty, -1] \cup [1, +\infty\rangle \\
&\Leftrightarrow \quad \log_2 x \leq -1 \quad \text{ili} \quad \log_2 x \geq 1
\end{aligned}$$

Zadatak 15

Riješite nejednadžbu
$$(\log_2 x)^2 \geq 1.$$

Rješenje. Za svaki $x \in \langle 0, +\infty\rangle$ imamo

$$\begin{aligned}
(\log_2 x)^2 \geq 1 \quad &\Leftrightarrow \quad (\text{supstitucija } t = \log_2 x) \quad \Leftrightarrow \quad t^2 \geq 1\\
&\Leftrightarrow \quad t^2 - 1 \geq 0\\
&\overset{\text{sami}}{\Leftrightarrow} \quad t \in \langle -\infty, -1] \cup [1, +\infty\rangle\\
&\Leftrightarrow \quad \log_2 x \leq -1 \quad \text{ili} \quad \log_2 x \geq 1\\
&\Leftrightarrow \quad (\text{djelujemo strogo rastućom funkcijom } f(x) := 2^x)
\end{aligned}$$

Zadatak 15

Riješite nejednadžbu

$$(\log_2 x)^2 \geq 1.$$

Rješenje. Za svaki $x \in \langle 0, +\infty\rangle$ imamo

$$\begin{aligned}
(\log_2 x)^2 \geq 1 \quad &\Leftrightarrow \quad (\text{supstitucija } t = \log_2 x) \quad \Leftrightarrow \quad t^2 \geq 1 \\
&\Leftrightarrow \quad t^2 - 1 \geq 0 \\
&\overset{\text{sami}}{\Leftrightarrow} \quad t \in \langle -\infty, -1] \cup [1, +\infty\rangle \\
&\Leftrightarrow \quad \log_2 x \leq -1 \quad \text{ili} \quad \log_2 x \geq 1 \\
&\Leftrightarrow \quad (\text{djelujemo strogo rastućom funkcijom } f(x) := 2^x) \\
&\Leftrightarrow \quad x \leq 2^{-1} \quad \text{ili} \quad x \geq 2^1
\end{aligned}$$

Zadatak 15

Riješite nejednadžbu

$$(\log_2 x)^2 \geq 1.$$

Rješenje. Za svaki $x \in \langle 0, +\infty\rangle$ imamo

$$\begin{aligned}
(\log_2 x)^2 \geq 1 \quad &\Leftrightarrow \quad (\text{supstitucija } t = \log_2 x) \quad \Leftrightarrow \quad t^2 \geq 1 \\
&\Leftrightarrow \quad t^2 - 1 \geq 0 \\
&\overset{\text{sami}}{\Leftrightarrow} \quad t \in \langle -\infty, -1] \cup [1, +\infty\rangle \\
&\Leftrightarrow \quad \log_2 x \leq -1 \quad \text{ili} \quad \log_2 x \geq 1 \\
&\Leftrightarrow \quad (\text{djelujemo strogo rastućom funkcijom } f(x) := 2^x) \\
&\Leftrightarrow \quad x \leq 2^{-1} \quad \text{ili} \quad x \geq 2^1 \\
&\Leftrightarrow \quad x \leq \frac{1}{2} \quad \text{ili} \quad x \geq 2.
\end{aligned}$$

Zadatak 15

Riješite nejednadžbu
$$(\log_2 x)^2 \geq 1.$$

Rješenje. Za svaki $x \in \langle 0, +\infty\rangle$ imamo

$$\begin{aligned}
(\log_2 x)^2 \geq 1 \quad &\Leftrightarrow \quad (\text{supstitucija } t = \log_2 x) \quad \Leftrightarrow \quad t^2 \geq 1 \\
&\Leftrightarrow \quad t^2 - 1 \geq 0 \\
&\overset{\text{sami}}{\Leftrightarrow} \quad t \in \langle -\infty, -1] \cup [1, +\infty\rangle \\
&\Leftrightarrow \quad \log_2 x \leq -1 \quad \text{ili} \quad \log_2 x \geq 1 \\
&\Leftrightarrow \quad (\text{djelujemo strogo rastućom funkcijom } f(x) := 2^x) \\
&\Leftrightarrow \quad x \leq 2^{-1} \quad \text{ili} \quad x \geq 2^1 \\
&\Leftrightarrow \quad x \leq \frac{1}{2} \quad \text{ili} \quad x \geq 2.
\end{aligned}$$

Dakle, rješenje zadane nejednadžbe je $\langle 0, \frac{1}{2}] \cup [2, +\infty\rangle$.